



Серия №15. Скалярное произведение

9 июля

Теория

Определение. Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между их направлениями, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

Свойства скалярного произведения

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot k\vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ (под $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ имеется в виду длина проекции вектора \vec{b} на вектор \vec{a} с учетом знака)
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Упражнения

1. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ перпендикулярны, то длины векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} равны.
2. Докажите, что если AB и CD – диаметры некоторой окружности с центром O , а E – произвольная точка, то $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$.
3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Задачи

4. Для произвольных точек докажите равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
5. Правильный многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O , точка X – произвольная. Докажите, что:

$$A_1X^2 + A_2X^2 + \dots + A_nX^2 = n(R^2 + OX^2)$$

6. Точки M и N – середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что:

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$$

7. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.
8. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D – середина стороны AB , O – центр описанной окружности, M – точка пересечения медиан треугольника ACD . Докажите, что $OM \perp CD$.
9. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.
10. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.